

Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

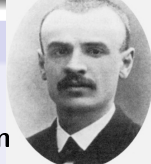
Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 12

Twierdzenie Banacha-Steinhaus



Tw. (Twierdzenie Baire'a)

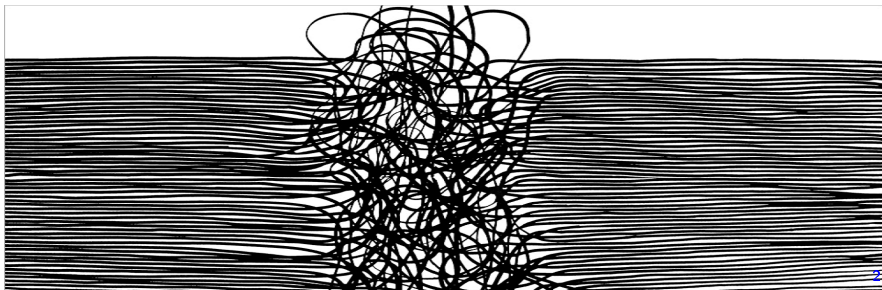


Przeliczalna suma domkniętych zbiorów brzegowych w przestrzeni metrycznej zupełnej jest zbiorem brzegowym

$$\left(\begin{array}{l} X \text{ przestrzeń metryczna zupełna} \\ A_n \subseteq X \text{ domknięty, ale } \text{Int}(A_n) = \emptyset \end{array} \right) \implies \text{Int}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \emptyset.$$

Prz. Niech $X = \mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$ z metryką $d(x, y) = |x - y|$ oraz $A_n = \{q_n\}$. Wtedy A_n domknięte, $\text{Int}(A_n) = \emptyset$, ale $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{Q}$. Czyli $\text{Int}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \text{Int}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Dlaczego? (bo $\mathbb{Q}$ nie jest zupełna!)

Prz. Przeliczalną płataniną krzywych nie da się wypełnić powierzchni



Twierdzenie Banacha-Steinhaus

Niech X przestrzeń Banacha, a Y przestrzeń unormowana. Dla dowolnej rodziny $\{T_i\}_{i \in I} \subseteq B(X, Y)$ operatorów ograniczonych

$$\forall x \in X \sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty \iff \sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty.$$

←
łatwe

Czyli $\forall x \in X$ rodzina $\{T_i x\}_{i \in I}$ jest ograniczona w Y (punktowo)
 $\iff$ rodzina $\{T_i\}_{i \in I}$ jest ograniczona w $B(X, Y)$ (jednostajnie).

Dowód: ' $\implies$ ' Zbiory $A_n := \{x \in X : \sup_{i \in I} \|T_i x\| \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, są domknięte, bo T_i są ciągłe. Z założenia, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Zatem z **Tw. Baire'a** istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, $x_0 \in X$ oraz $\varepsilon > 0$ takie, że $K(x_0, \varepsilon) \subseteq A_{n_0}$. Dla $x \in X$, $\|x\| = 1$, oraz $i \in I$ mamy

$$\|T_i x\| = \frac{2}{\varepsilon} \|T_i (\frac{\varepsilon}{2} x)\| = \frac{2}{\varepsilon} \|T_i ((x_0 + \frac{\varepsilon}{2} x) - x_0)\|$$

$$\leq \frac{2}{\varepsilon} \|T_i (x_0 + \frac{\varepsilon}{2} x)\| + \frac{2}{\varepsilon} \|T_i (x_0)\| \left\{ \begin{array}{l} x_0 + \frac{\varepsilon}{2} x \in K(x_0, \varepsilon) \subseteq A_{n_0} \\ x_0 \in K(x_0, \varepsilon) \subseteq A_{n_0} \end{array} \right\}$$

$$\leq \frac{2}{\varepsilon} n_0 + \frac{2}{\varepsilon} n_0 = \frac{4}{\varepsilon} n_0. \quad \text{Stąd } \sup_{i \in I} \|T_i\| \leq \frac{4}{\varepsilon} n_0 < \infty. \quad \blacksquare$$

Wn. Granica punktowa ciągu operatorów ograniczonych na przestrzeni Banacha jest operatorem ograniczonym. Tzn.

$$\left(\begin{array}{l} \{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq B(X, Y) \\ X \text{ przestrzeń Banacha} \\ \forall_{x \in X} \{T_n x\}_{n=1}^{\infty} \text{ zbieżny} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} T \in B(X, Y), \text{ gdzie} \\ \forall_{x \in X} T x := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x \end{array} \right)$$

Dowód: Jeśli $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ zbieżny dla każdego $x \in X$, to kładąc $T x := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ otrzymujemy operator liniowy, bo granica jest operacją liniową. Ponadto zbieżność ciągu $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ implikuje jego ograniczoność, dla każdego $x \in X$. Zatem na mocy Twierdzenia Banacha-Steinhausa mamy $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$.

Ponadto

$$\|T x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n x\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| \cdot \|x\|.$$

Czyli T jest ograniczony oraz $\|T\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$. ■

Def. Niech X przestrzeń unormowana. **Słabą topologią** na X nazywamy najśłabszą topologią, przy której wszystkie funkcjonały z X^* są ciągłe. Bazą tej topologii są zbiory postaci

$$U_{f_1, \dots, f_n, \varepsilon}(x) := \{y \in X : |f_i(y) - f_i(x)| < \varepsilon, 1 \leq i \leq n\},$$

gdzie $x \in X$, $f_1, \dots, f_n \in X^*$, $\varepsilon > 0$.

Uw. Jeżeli ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ jest **słabo zbieżny** (czyli zbieżny w słabej topologii) do $x_0 \in X$, to piszemy $x_n \xrightarrow{w} x_0$. Mamy

$$x_n \xrightarrow{w} x_0 \iff \forall f \in X^* \quad f(x_n) \longrightarrow f(x_0).$$

Z Twierdzenia Hahna-Banacha wynika, że granica słabo zbieżnego ciągu jest wyznaczona jednoznacznie – słaba topologia spełnia warunek Hausdorffa.



Uw. Słaba topologia na X jest słabsza od tej zadanej przez normę

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0 \implies x_n \xrightarrow{w} x_0.$$



Prz. Jeśli $X = H$ przestrzeń Hilberta, to na mocy Twierdzenia Riesz-Frecheta każdy funkcjonal $f \in H^*$ jest postaci $f(x) = \langle x, y \rangle$, dla pewnego $y \in H$. Zatem dla każdego ciągu $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ zachodzi

$$x_n \xrightarrow{w} x_0 \iff \forall_{y \in H} \langle x_n, y \rangle \longrightarrow \langle x_0, y \rangle.$$

Dla przykładu, rozważmy układ ortonormalny $\{e_n\}_{n=1}^\infty \subseteq H$. Wtedy

$$\|e_n - e_m\|^2 = \|e_n\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle e_n, e_m \rangle + \|e_m\|^2 = 2, \quad n \neq m.$$

Zatem $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ nie jest zbieżny w normie. Jest zato słabo zbieżny:

$$e_n \xrightarrow{w} 0.$$

Rzeczywiście, dla dowolnego $y \in H$, z nierówności Bessela mamy $\sum_{n=1}^\infty |\langle e_i, y \rangle|^2 \leq \|y\|^2$. Skoro szereg $\sum_{n=1}^\infty |\langle e_i, y \rangle|^2$ jest zbieżny, to $\langle e_i, y \rangle \rightarrow 0 = \langle 0, y \rangle$. Czyli $e_n \xrightarrow{w} 0$.

Norma nie jest słabo ciągła, bo $0 = \|0\| < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|e_n\| = 1$.

Tw1. Topologia słaba = topologia normowa $\iff \dim(X) < \infty$.

Tw2. X jest refleksywna $\iff \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ słabo zwarty.

Stw. Każdy ciąg słabo zbieżny jest ograniczony, tzn.

$$x_n \xrightarrow{w} x_0 \implies \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ograniczony w normie.}$$

Ponadto, $\|x_0\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$ (norma jest słabo półciągła z dołu).

Dowód: Każdy $x \in X \subseteq X^{**}$ możemy traktować jako funkcjonał $i(x)$ na przestrzeni X^* , gdzie $i(x)(f) = f(x)$. Wtedy $\|i(x)\| = \|x\|$ oraz

$$x_n \xrightarrow{w} x_0 \iff \forall_{f \in X^*} i(x_n)(f) \longrightarrow i(x_0)(f).$$

Czyli słaba zbieżność ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ jest równoważna zbieżności punktowej ciągu funkcjonałów liniowych $\{i(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Niech $x_n \xrightarrow{w} x_0$. Na mocy **Tw. Banacha-Steinhaus**, ciąg $\{i(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X^{**}$ jest ograniczony. Równoważanie $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony.

Na mocy **Tw. Hahna-Banacha** istnieje $f \in X^*$ taki, że $\|f\| = 1$ oraz $f(x_0) = \|x_0\|$. Stąd i ze słabej zbieżności

$$\|x_0\| = f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f\| \|x_n\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|. \quad \blacksquare$$